Title	Splitで連結な簡約Lie群上の戸田格子の特異点解消について (表現論とその周辺分野の広がり)
Author(s)	池田, 薫
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2018), 2077: 70-78
Issue Date	2018-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/242101
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第2077巻 2018年 70-78

Splitで連結な簡約Lie群上の戸田格子の特異点解消について*

慶應義塾大学・経済学部† 池田 薫
Kaoru Ikeda
Department of Mathematics, Faculty of Economy, Keio University

Abstract

戸田格子は Lie 群上の非線形可積分系の方程式であることが知られている．Painlevé 方程式が動く特異点を持つように戸田格子も初期値に依存した特異点を持つ．Flaschka と Haine はその特異点が極であることを証明しその極の位数が Weyl 群の長さに由来していることも証明した．また Kodama と Casian は戸田格子の特異点と実半単純 Lie 群により定義された旗多様体のトポロジーとの関連について研究を行った． 本論説では一般に split で連結な簡約 Lie 群上で定義された戸田格子が特異因子と交差する時に旗多様体に起こる位相的変化について論じる．特異因子との交差により Weyl 領域の壁の飛び越しが起こることを述べる． 本論説は現在投稿中の論文 [5] の announcement である．

1 Introduction

この節ではしばらく $G=GL_n(\mathbb{R})$ とし H を Cartan 部分群，$B\subset G$ を上三角 Borel 群，$N\subset B$ を上三角べきゼロ群とし $\bar{B}$，$\bar{N}$ をそれぞれの opposite としよう．さらに $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{n}$，$\bar{\mathfrak{b}}$，$\bar{\mathfrak{n}}$ をそれぞれの Lie 環としよう．よく知られた (A 型の有限) 戸田格子とは以下の方程式系である [11]

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t)=-e^{q_1(t)-q_2(t)} \\ \ddot{q}_i(t)=e^{q_{i-1}(t)-q_i(t)}-e^{q_i(t)-q_{i+1}(t)} & 2\le i\le n-1 \\ \ddot{q}_n(t)=e^{q_{n-1}(t)-q_n(t)} \end{cases} \tag{1}$$

(1) は三重対角行列 $L\in\mathfrak{g}$ により

$$\dot{L}(t)=[(L(t))_+,L], \tag{2}$$

とあらわせる．但し

$$L=\Lambda+\sum_{i=1}^{n}L_{i,i}E_{i,i}+\sum_{i=1}^{n-1}L_{i+1,i}E_{i+1,i}$$

---

* この研究は科学研究助成金基盤研究 C による助成を受けた．
† 〒223-8521 横浜市港北区日吉 4-1-1

で Λ はシフト行列，$E_{i,j}$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ の i,j 行列単位とする．また $(\cdot)_+$ は $\mathfrak{b}$ への射影とする．このLを戸田格子の Lax 行列という．今 L を少し拡張して $L \in \Lambda + \bar{\mathfrak{b}}$ としよう．この拡張した L に対する (2) と同じ形の方程式

$$\dot{L} = [(L)_+, L] \tag{3}$$

を full Kostant-戸田格子という．さて (2) を見てわかるとおり full Kostant-戸田格子の時間発展 d/dt は $\mathrm{ad}(\Lambda + \mathfrak{h})$ に対応しているので L に対する制限 $L_{i,j} = 0,\ i - j > 2$ と (3) は compatible になることがわかる．つまり full Kostant-戸田格子は通常の戸田格子を含む．したがって以後 full Kostant-戸田格子を単に戸田格子と呼ぶ．(3) の解は次のようにして得られる．$L_0 \in \Lambda + \bar{\mathfrak{b}}$ とする．$t \in \mathbb{R}$ に対し次の分解を考える．

$$W_\infty(t)^{-1} W_0(t) = e^{tL_0}, \tag{4}$$

ただし $W_\infty(t) \in \bar{N}$，$W_0(t) \in B$ とする． Lax 行列を $L(t) = W_\infty(t) L_0 W_\infty(t)^{-1}$ で定義すると $L(t)$ は (3) をみたす．分解 (4) を e^{tL_0} の Gauss 分解という．一般に $g \in G$ に対して $g = nb,\ n \in \bar{N},\ b \in B$ を g の Gauss 分解という．$g = (g_{i,j})$ としよう．すると g の Gauss 分解は以下の連立方程式系と同値になる．

$$(w_{i,1}, \ldots, w_{i,i-1}) \begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,i-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{i-1,1} & \cdots & g_{i-1,i-1} \end{pmatrix} = -(g_{i,1}, \ldots, g_{i,i-1}), \tag{5}$$

ただし $i = 2, \ldots, n$．(5) の解はクラーメルの公式により

$$w_{i,j} = - \begin{vmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,i-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{i,1} & \cdots & g_{i,i-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{i-1,1} & \cdots & g_{i-1,i-1} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,i-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{i-1,1} & \cdots & g_{i-1,i-1} \end{vmatrix} \tag{6}$$

となる．さて $D_i := \det(g_{\mu,\nu})_{1 \le \mu,\nu \le i-1}$ とし

$$\Theta := \{g \in G | D_2(g) \cdots D_n(g) = 0\}$$

とする．$g \in \Theta$ とするとどこかの i で (6) の分母が 0 になり W は極を持つ．これは戸田格子 (3) の極となり得る．非線形方程式の特異点とその解消は戸田格子の他にも古典パンルベ方程式の自然な初期値空間のコンパクト化に伴い現れる [9,10]．この論説では戸田格子の軌道をより高い次元の空間へ持ち上げ特異因子 Θ と戸田格子の軌道が交差しないような特異点の解消について論じる．戸田格子の上記の特異点近傍での Painlevé 解析は [3] により論じられている．また [4] により $GL_n(\mathbb{F})$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$ の場合に特異点の幾何学的記述がな

されている．よく知られているように戸田格子は $GL_n(\mathbb{R})$ 以外でも様々なタイプの Lie 群上で定義される．もし特異点解消が可能ならすべてのタイプに共通した理論でなくてはならない．したがって上記の行列表示によらず戸田格子の特異点とその解消が Lie 群の対称性のみを用いて論じられるはずである．本論説では戸田格子を旗多様体上の力学系と捉え等質空間の対称性による特異点の解消について論じた．[1,2] では Gauss 分解の特異性を Cartan 部分群の特異性に帰着させた．この論説ではこの方法を一般化し G/B 上の主 H 束を考え戸田格子の特異性を Weyl 領域の面を用いて表すことを考えた．

2 戸田格子の特異因子の稠密な胞体上での実現

あらためて記号を定義しよう．G を split で連結な簡約 Lie 群としよう (たとえば代数的閉体上の連結な簡約 Lie 群)．$H \subset G$ を Cartan 部分群とする．$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G, \mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\, H$ とする．Δ を $\mathfrak{h}$ によって決まる $\mathfrak{g}$ の root 系とする．$\alpha \in \Delta$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha$ を対応するルートベクトルの空間とする．$\mathfrak{g}$ は split だからルート分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \oplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$ を持つ．正のルート系 Δ_+ を定め Borel 部分代数を $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \oplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$ と定義し，べきゼロ部分代数を $\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$ で定義する．$\bar{\mathfrak{b}}$，$\bar{\mathfrak{n}}$ をそれぞれの opposite とする．B，N，$\bar{B}$，$\bar{N}$ をそれぞれ $\mathfrak{b}$，$\mathfrak{n}$，$\bar{\mathfrak{b}}$，$\bar{\mathfrak{n}}$ を Lie 環とする G の部分群とする．$g \in G$ が $g = nb$，$n \in \bar{N}$，$b \in B$ と分解されるとき g は Gauss 分解を持つと言おう．さて W を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ によって決まる Weyl 群としよう．また $X := G/B$ を旗多様体とする．X は Bruhat 分解

$$X = G/B = \sqcup_{w\in W} BwB/B \tag{7}$$

を持つ．ここで $W = N(H)/H$，$N(H)$ は H の正規化群，なので代表元をあらわすべく $\dot{w}$ のように表すべきだが簡単のため上のドットは省いた．簡単な議論で (7) は別の表示

$$X = \sqcup_{w\in W} \bar{N}wB/B \tag{8}$$

を持つことがわかる．(8) における最大の胞体 $\bar{N}B/B$ を X_ϕ とする．したがって $g \in G$ が Gauss 分解可能 $\Leftrightarrow$ $g \bmod B \in X_\phi$ がわかる．よって戸田格子が極を持つのは有限時間内に戸田格子の軌道が X_ϕ 以外の胞体と交わるからである．本節ではこの X_ϕ 以外の胞体を X_ϕ の中の軌道として実現し次節における特異点解消の準備としたい．今 X の任意の胞体 $\bar{N}wB/B$, $w \in W$ をひとつ取る．次が成り立つ

定理 2.1 次の同相写像が存在する．

$$\bar{N}wB/B \simeq (w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B.$$

すなわち $w \in W$ に対応する胞体 $\bar{N}wB/B$ は X_ϕ の中で部分群 $w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N}$ の軌道としてあらわせる．

証明 $||*||$ を $\mathfrak{g}$ の自然なノルムとする．今 $A \subset G$ を部分群とし $\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}A$ としたとき $0 < \epsilon \ll 1$ に対して $\mathfrak{a}(\epsilon) := \{\xi \in \mathfrak{a} \mid ||\xi|| < \epsilon\}$ とする．$e^{\xi}, \xi \in \mathfrak{a}(\epsilon)$ で生成される A の連結成分を $A(\epsilon)$ とする．$\mathfrak{g}(\epsilon)$ から G への中への同型写像を $\xi \mapsto e^{\xi}$ とする．また $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{b}$ なので同相写像 $\Phi\colon \mathfrak{g}(\epsilon) \to \bar{N}(\epsilon)B(\epsilon)$ が定義できる．従って単位元の十分小さな近傍 U を $U \subset \bar{N}(\epsilon)B(\epsilon) \cap \exp(\mathfrak{g}(\epsilon))$ となるように取れる．このとき U の中の任意の元 g は Gauss 分解を持つことがわかる．今 $0 \in \mathfrak{g}$ の近傍 V で $\exp V \subset U$ となるものを取る．$\xi_1, \ldots, \xi_r \in \bar{\mathfrak{n}} \cap V$ とする．$w \in W$ に対して $w^{-1}e^{\xi_1}w = e^{\mathrm{Ad}w^{-1}\xi_1}$．今 $\mathrm{Ad}w^{-1}\xi_1 \in V$ と仮定する．すると $e^{\mathrm{Ad}w^{-1}\xi_1}$ は Gauss 分解可能で $e^{\mathrm{Ad}w^{-1}\xi_1} = e^{\xi_1^-}e^{\xi_1^+}$，$\xi_1{}^- \in \bar{\mathfrak{n}}, \xi_1{}^+ \in \mathfrak{b}$ とかける．以後 $\xi_i{}^- \in \bar{\mathfrak{n}}, \xi_i{}^+ \in \mathfrak{b}$ とする．すると

$$w^{-1}e^{\xi_1}\cdots e^{\xi_r}w = w^{-1}e^{\xi_1}ww^{-1}\xi_2\cdots\xi_r w$$

$$= e^{\xi_1^-}e^{\xi_1^+}w^{-1}e^{\xi_2}\cdots e^{\xi_r}w = e^{\xi_1^-}\exp(\mathrm{Ad}(e^{\xi_1^+}w^{-1})\xi_2)e^{\xi_1^+}w^{-1}e^{\xi_3}\cdots e^{\xi_r}w$$

今 $\mathrm{Ad}(e^{\xi_1^+}w^{-1})\xi_2 \in V$ と仮定すると $\exp(\mathrm{Ad}(e^{\xi_1^+}w^{-1})\xi_2) = e^{\xi_2^+}e^{\xi_2^-}$，$\xi_2{}^+ \in \mathfrak{b}$，$\xi_2{}^- \in \bar{\mathfrak{n}}$ とかけるので

$$w^{-1}e^{\xi_1}\cdots e^{\xi_r}w = e^{\xi_1^-}e^{\xi_2^-}e^{\xi_2^+}e^{\xi_1^+}w^{-1}e^{\xi_3}\cdots e^{\xi_r}w$$

を得る．

$$e^{\xi_1^-}e^{\xi_2^-}e^{\xi_2^+}e^{\xi_1^+}w^{-1}e^{\xi_3}\cdots e^{\xi_r}w =$$

$$e^{\xi_1^-}e^{\xi_2^-}\exp(\mathrm{Ad}(e^{\xi_2^+}e^{\xi_1^+}w^{-1})\xi_3)e^{\xi_2^+}e^{\xi_1^+}w^{-1}e^{\xi_4}\cdots e^{\xi_r}w$$

となるが $\mathrm{Ad}(e^{\xi_2^+}e^{\xi_1^+}w^{-1})\xi_3 \in V$ と仮定すると

$$\exp(\mathrm{Ad}(e^{\xi_2^+}e^{\xi_1^+}w^{-1})\xi_3) = e^{\xi_3^-}e^{\xi_3^+}$$

となるので

$$e^{\xi_1^-}e^{\xi_2^-}\exp(\mathrm{Ad}(e^{\xi_2^+}e^{\xi_1^+}w^{-1})\xi_3)e^{\xi_2^+}e^{\xi_1^+}w^{-1}e^{\xi_4}\cdots e^{\xi_r}w$$

$$= e^{\xi_1^-}e^{\xi_2^-}e^{\xi_3^-}e^{\xi_3^+}e^{\xi_2^+}e^{\xi_1^+}w^{-1}e^{\xi_4}\cdots e^{\xi_r}w$$

を得る．以後同様の仮定と操作を繰り返すと

$$w^{-1}e^{\xi_1}\cdots e^{\xi_r}w \bmod B = \cdots = e^{\xi_1^-}e^{\xi_2^-}\cdots e^{\xi_r^-} \bmod B$$

を得る．0 の近傍 $V \subset \mathfrak{g}$ を十分小さく取る．$r = \dim\bar{\mathfrak{n}}$ とすると $e^{\xi_1}\cdots e^{\xi_r}$ は $\bar{N}$ の単位元の開近傍をなす．さらに上記議論の仮定を 1 から r までみたすように V を十分小さく取ると $w^{-1}\bar{N}wB/B$ の原点の近傍 U で $U \subset \bar{N}B/B$ となるものが存在する．

補題 2.2 $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B$ は $w^{-1}\bar{N}wB/B$ において開集合である．

証明 U は $w^{-1}\bar{N}wB/B$ の開集合だから $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})U = \cup_{g \in w^{-1}\bar{N}w\cap\bar{N}} gU$ も $w^{-1}\bar{N}wB/B$ の開集合となる．したがって $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})U = (w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B$ を示せばよい．上記で示したように $e \bmod B$ の $w^{-1}\bar{N}wB/B$ における基本近傍系として

$$\mathscr{V} = \{U \mid e \bmod B \in U \subset w^{-1}\bar{N}wB/B \cap \bar{N}B/B\}$$

がとれる．Bruhat 分解の一般論から $\dim \bar{N}wB/B = \dim \mathfrak{n} - \ell(w)$，ここで $\ell(w)$ は w の長さ．$w^{-1}\bar{N}wB/B \simeq \bar{N}wB/B$ より $\dim w^{-1}\bar{N}wB/B = \dim \bar{\mathfrak{n}} - \ell(w)$．よって $\dim(w^{-1}\bar{N}wB/B \cap \bar{N}B/B) \leq \dim \bar{\mathfrak{n}} - \ell(w)$．一方 $\mathrm{Ad}w^{-1}$ は $\ell(w)$ 個の negative root を positive root に移すから $\dim(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B = \dim \bar{\mathfrak{n}} - \ell(w)$．さらに $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B \subset w^{-1}\bar{N}wB/B \cap \bar{N}B/B$ より $e \bmod B$ の $w^{-1}\bar{N}wB/B$ における近傍系として

$$\mathscr{W} = \{U' \mid e \bmod B \in U' \text{ is open in } (w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B\}$$

がとれる．よって $U' \in \mathscr{W}$ で $U' \subset U$ なるものがとれる．このとき $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})U' = (w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B$ となるので $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})U = (w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B$ がしたがう．$\square$

最後に $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B$ が $w^{-1}\bar{N}wB/B$ で閉集合であることを示す．$(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B \subset w^{-1}\bar{N}wB/B \cap \bar{N}B/B$ で $\bar{N}B/B$ は G/B の開集合．よって $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B$ が $\bar{N}B/B$ で閉集合であることを示せばよい．さらに $X_\phi = \bar{N}B/B \simeq \bar{N}$ より $w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N}$ が $\bar{N}$ で閉集合であることを示せばよい．$\{x_n\}$ を $w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N}$ の点列とし $x_n \to x \in \bar{N}$ とする．$x_n \in w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N}$ より $y_n = wx_nw^{-1}$ とすると $y_n \in \bar{N}$．$\mathrm{Ad}w$ は連続写像だから $\lim_{n\to\infty} y_n = wxw^{-1}$ を得る．$y = \lim_{n\to\infty} y_n$ とすると $x, y \in \bar{N}$．よって $x \in w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N}$．したがって $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B$ は $w^{-1}\bar{N}wB/B$ の閉集合でもあることがわかる．よって $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B$ は $w^{-1}\bar{N}wB/B$ の連結成分になることがわかるが $w^{-1}\bar{N}wB/B \simeq \bar{N}wB/B$ で $\bar{N}wB/B$ は $w \bmod B$ の連結な $\bar{N}$ による軌道だから連結．よって $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B = w^{-1}\bar{N}wB/B$ がしたがう．$\square$

例えば $G = GL_4(\mathbb{R})$ とし $W = \mathfrak{S}_4$(4次の対称群) としたとき

$$\bar{N} \cap w^{-1}\bar{N}w = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \xi_{4,1} & \xi_{4,2} & \xi_{4,3} & 1 \end{array} \right) \middle| \ \xi_{2,1}, \xi_{4,1}, \xi_{4,2}, \xi_{4,3} \in \mathbb{R} \right\},$$

ここで $w = \sigma_{2,3}\sigma_{1,2}$ で $\sigma_{i,j} \in \mathfrak{S}_4$ は i と j の互換．

本節を終えるにあたり定理 2.1 の応用に触れたい．$GL_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の場合任意の $g \in G$ に対してある $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して σg は Gauss 分解可能になることが線形代数を使った簡単な議論からわかる ([5] の Appendix)．この事実はより一般的な場合に拡張できる．次の Corollary の代数群のカテゴリーにおける証明は [6] を参照．

系 2.3 (Gauss 分解あるいは local triviality) G を split で簡約な連結 Lie 群とする．任意の $g \in G$ に対してある $w \in W$ が存在して wg は Gauss 分解可能である．

注意 より幾何学的には $X = G/B$ が開被覆 $X = \cup_{w\in W} wX_\phi$ を持つと表現できる．この言い換えは余随伴軌道法を旗多様体上の接続の幾何学，いわゆる幾何学的量子化の議論に不可欠である [7,8].

証明 $p: G \to G/B$ を自然な射影とする．今任意の $w \in W$ について $\bar{N}wB \subset p^{-1}(\bar{N}wB/B)$ がなりたつ．定理 2.1 より $p(w^{-1}\bar{N}wB) \subset X_\phi$. Bruhat 分解により任意の $g \in G$ に対して $p^{-1}(g \bmod B) \cap \bar{N}wB \neq \emptyset$ となる $w \in W$ が存在する．よって $w^{-1}g \bmod B \in X_\phi$. よってある $b, b' \in B$ と $n \in \bar{N}$ が存在して $w^{-1}gb' = nb$ となる．このとき $w^{-1}g = n(bb'^{-1})$ が $w^{-1}g$ の Gauss 分解になる． □

3 戸田格子の特異因子の解消

Introduction でも述べたが戸田格子が有限時間のうちに持つ極は e^{tL_0} が X_ϕ 以外の胞体と交点を持つことに起因する．$G = GL_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ の場合は行列表示を用いて，つまり座標表示を用いて [4] において議論した．今回は別の手法で一般の split で連結な簡約 Lie 群の場合に特異点の解消を行いたい．さて前節で小さい胞体 $\bar{N}wB/B$, $w \neq \mathrm{id}$ を X_ϕ のなかで $\bar{N}$ の部分群 $w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N}$ の軌道として実現した．よって問題を「X_ϕ の中の特異因子 $\Theta_w := (w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})B/B$ の解消」と置き換えて考える．$\mathfrak{g}$ の単純ルート全体の集合を Ψ とする．通常 Weyl 領域は $\mathfrak{h}^*$ で定義されるが今回その双対として $\mathfrak{h}$ の中に領域を

$$V_0 := \{Y \in \mathfrak{h} \mid \langle \alpha, Y \rangle < 0, \text{ for } \forall \alpha \in \Psi\}$$

と定義しこれも Weyl 領域と呼ぶことにする．$w \in W$ に対して $\mathfrak{h}$ の中の領域 $w \cdot V_0$ を

$$w \cdot V_0 := \{Y \in \mathfrak{h} \mid \langle w^{-1}\alpha, Y \rangle < 0, \text{ for } \forall \alpha \in \Psi\}$$

で定義する．α に $w \in W$ は鏡映変換として作用する．これらも Weyl 領域と呼ぶ．V_0 の Weyl 群による軌道は $\mathfrak{h}$ で稠密である．すなわち

$$\mathfrak{h} - \cup_{\alpha\in\Delta} P_\alpha = \sqcup_{w\in W} w \cdot V_0, \tag{9}$$

がなりたつ．ここで $P_\alpha := \{Y \in \mathfrak{h} \mid \langle \alpha, Y \rangle = 0\}$ とする．$\bar{V}_0$ で V_0 の $\mathfrak{h}$ での閉包とする．$w \in W$ の作用は連続だから $\overline{w \cdot V_0} = w \cdot \bar{V}_0$ となる．G/B 上の主 H 束 $\pi: G/N \to G/B$ を考える．$\tilde{X}_\phi = \pi^{-1}(X_\phi)$ とする．

命題 3.1 $\tilde{X}_\phi$ は $|W|$ 個の連結成分を持っている．それらを $\{\tilde{X}_\phi^w\}_{w\in W}$ としたとき，これらは $\pi(\tilde{X}_\phi^w) = X_\phi$ をみたす．

証明 任意の $h \in H$ に対して $\bar{N}hN/N$ は連結で明らかに $\pi(\bar{N}hN/N) = X_\phi$. ${n_1}^- h_1 {n_1}^+ = {n_2}^- h_2 {n_2}^+$ とする．ただし ${n_i}^- \in \bar{N}$, ${n_i}^+ \in N$, $h_i \in H$, $i = 1, 2$ とする．Gauss 分解の一意性から ${n_1}^- = {n_2}^-$ と $h_1 {n_1}^+ = h_2 {n_2}^+$，つまり $h_1 = h_2$, ${n_1}^+ = {n_2}^+$ がしたがう．このことから $\bar{N}h_1N/N \cap \bar{N}h_2N/N = \emptyset \Leftrightarrow h_1 \neq h_2$ がわかる．$w \in W$ に対して H の領域 $e(w \cdot V_0) := \exp(w \cdot V_0)$ を考える．$\pi(\bar{N}e(w \cdot V_0)N/N) = X_\phi$ および $\bar{N}e(w \cdot V_0)N/N \cap \bar{N}e(w' \cdot V_0)N/N = \emptyset \Leftrightarrow w \neq w'$ より $\tilde{X}_\phi^w = \bar{N}e(w \cdot V_0)N/N$ とすればよい． □

特異因子 Θ_w に対しても $\pi^{-1}(\Theta_w)$ は $|W|$ 個の連結成分を持つ．そのうちの一つ $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})e(V_0)N/N$ を fix する．$(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})e(V_0)$ は $(w^{-1}\bar{N}w \cap \bar{N})e(V_0)N/N$ の局所座標とみなせる．$G/N \simeq wGw^{-1}/w\bar{N}w^{-1}$ より任意の $w_0 \in W$ に対して次の同相写像が導かれる．

$$\bar{N}e(w_0 \cdot \bar{V}_0) \simeq w\bar{N}w^{-1}e(ww_0 \cdot \bar{V}_0). \tag{10}$$

X_ϕ における Θ_w の特異点の解消を Weyl 群 W に関するゲージ対称性を用いて行う．

定義 部分集合 $A \subset G$ と $w \in W$ に対して $S(A, w)$ を

$$S(A, w) := \{A \cap w'\bar{N}w'^{-1}e((w'w) \cdot \bar{V}_0)\}_{w' \in W}$$

で定義する．また $w'' \in W$ に対してゲージ変換 $\rho(w'')\colon S(A, w) \to S(A, w)$ を

$$\rho(w'')(A \cap w'\bar{N}w'^{-1}e((w'w) \cdot \bar{V}_0)) = A \cap w''w'\bar{N}(w''w')^{-1}e((w''w'w) \cdot \bar{V}_0)$$

により定義する．任意の $w' \in W$ について $\rho(w')$ は bijection である．A, w を fix した時 $S, T \subset G$ が $S, T \in S(A, w)$ となる時 $S \sim T$ と書いてゲージ同値と言おう．

注意 $S \sim T$ は同相を意味しない．bijective とも限らない．$S \sim T$，$S \neq \emptyset$ でも $T = \emptyset$ ということもありうる．少し乱暴な解釈だが $S(A, w)$ とは A という物体を角度 w から周波数 w' の波を当てた時に得られる散乱データの集合と思える．ある角度から光を当て物体が見えても周波数を変えたら見えなくなる (つまり $\emptyset$) ということも起こりうる．

命題 3.2 次が成り立つ．

$$(\bar{N} \cap w^{-1}\bar{N}w)e(V_0) \sim \bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0). \tag{11}$$

証明 2つの集合 $(\bar{N} \cap w^{-1}\bar{N}w)e(\bar{V}_0)$ と $\bar{N}e(\bar{V}_0) \cap w^{-1}\bar{N}we(\bar{V}_0)$ を比べよう．

$$(\bar{N} \cap w^{-1}\bar{N}w)e(\bar{V}_0) \subset \bar{N}e(\bar{V}_0) \cap w^{-1}\bar{N}we(\bar{V}_0)$$

は明らか．$x \in \bar{N}e(\bar{V}_0) \cap w^{-1}\bar{N}we(\bar{V}_0)$ とする．$x \in \bar{N}e(\bar{V}_0)$ より $x = nh$, $n \in \bar{N}$, $h \in e(\bar{V}_0)$ とかける．$x \in w^{-1}\bar{N}we(\bar{V}_0)$ でもあるので $nh = w^{-1}n'wh'$ となる $n' \in \bar{N}$, $h' \in H$

が存在する．よって $w^{-1}n'w = nhh'^{-1} \in B$．よって $w^{-1}n'w \in \bar{N}$ で $n = w^{-1}n'w \in w^{-1}\bar{N}w$．したがって

$$\bar{N}e(\bar{V}_0) \cap w^{-1}\bar{N}we(\bar{V}_0) \subset (\bar{N} \cap w^{-1}\bar{N}w)e(\bar{V}_0)$$

が言える．よって

$$(\bar{N} \cap w^{-1}\bar{N}w)e(\bar{V}_0) = \bar{N}e(\bar{V}_0) \cap w^{-1}\bar{N}we(\bar{V}_0) \sim \bar{N}e(\bar{V}_0) \cap \bar{N}e(w \cdot \bar{V}_0)$$

がわかる．$\bar{B}$ の $\bar{N}H$ 分解の一意性と $\bar{V}_0$ 上の exp 写像の一意性から

$$\bar{N}e(\bar{V}_0) \cap \bar{N}e(w \cdot \bar{V}_0) = \bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0)$$

となり $(\bar{N} \cap w^{-1}\bar{N}w)e(V_0) \sim \bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0)$ を得る． □

命題 3.2 の意味はゲージ変換を用いて $\bar{N}$ 成分の特異性をファイバーの $\exp(\bar{V}_0)$ 成分の特異性 (Weyl 領域の面) に押し付けることができるということである．$X'_\phi = X_\phi - \Theta_w$ とし $\tilde{X}'_\phi = \pi^{-1}(X'_\phi)$ とする．以後簡単のため Θ_w と $(\bar{N} \cap w^{-1}\bar{N}w)$ を同一視する．

$$\bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0)/N|_{\Theta_w} = \{xe(\xi) \bmod N \in \bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0)/N \mid x \in \Theta_w\}$$

とする．集合 $\hat{X}_\phi$ を

$$\hat{X}_\phi := \bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0)/N|_{\Theta_w} \sqcup \tilde{X}'_\phi$$

と定義する．$\hat{X}_\phi$ に次のように位相を入れる．$A = \tilde{X}'_\phi$, $B = \bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0)/N|_{\Theta_w}$ とおく．$\{\mathscr{V}\}$ を $\tilde{X}_\phi$ の基本近傍系としたとき $\{\mathscr{V} \cap A\} \cup \{\mathscr{V} \cap B\}$ は $\hat{X}_\phi$ の基本近傍系になる．ここで $\mathscr{V} \cap A$ とは $\{V \cap A \mid V \in \mathscr{V}\}$ のこととする．$\mathscr{V} \cap B$ も同じ．B の点列 $\{x_n\}$ が A の点に収束するということを $\hat{X}_\phi$ に入れた上記位相で定義できることを示せばよい．$x \in A$ とする．$\hat{V}$ を $\hat{X}_\phi$ における x の近傍とする．するとある $V \in \mathscr{V}$ が存在し $\hat{V} = V \cap A$ となる．よって任意の $x \in \hat{V}$ に対してある N が存在して $n \geq N$ ならば $x_n \in V$ として $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ を定義すればよい．局所座標を用いて $\tilde{X}'_\phi$ と $\bar{N}e(\bar{V}_0) - \Theta_w e(\bar{V}_0)$ 及び $\bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0)/N|_{\Theta_w}$ と $\bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0)$ を同一視する．$xe(\xi) \in \bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0)|_{\Theta_w}$ とする．$\tilde{\eta}(t)$ を $t < t_0$ において $\bar{N}e(\bar{V}_0) - \Theta_w e(\bar{V}_0)$ の中の曲線で，$t = t_0$ において $\tilde{\eta}(t_0) = xe(\xi)$ となり，$t > t_0$ で $\bar{N}e(w \cdot \bar{V}_0) - \Theta_w e(V_0)$ 内の曲線であるものとする．このとき $\eta(t) := \pi(\tilde{\eta}(t))$ は X_ϕ 内の曲線で $t = t_0$ で特異因子 Θ_w と交差する．以上より次の定理を得る．

定理 3.3　上記の位相を入れた空間

$$\hat{X}_\phi := \bar{N}e(\bar{V}_0 \cap w \cdot \bar{V}_0)/N|_{\Theta_w} \sqcup \tilde{X}'_\phi$$

は X_ϕ の Θ_w に関する特異点の解消になっている．

参考文献

[1] L. Casian and Y. Kodama, Toda lattice cohomology of compact Lie groups and finite Chevalley groups, Invent. Math. **165** (2006) 163–208.

[2] —, Singular structure of Toda lattice and cohomology of certain compact Lie groups, J. Comp. Appl. Math. **202** (2007) 59–79.

[3] H. Flaschka and L. Haine, Variété de drapeaux et réseaux de Toda, Math. Z. **208** (1991), 545–556.

[4] K. Ikeda, The monoidal transformation by Painlevé divisor and resolution of the poles of the Toda lattice, J. Math. Pure et Appl. **90** (2008) 329–337.

[5] —, The resolution of the singular loci of the Toda lattie on the split and connected reductive Lie groups, preprint

[6] J. Jantzen, Representation of algebraic groups, Mathematical surveys and monographs vol. 107, American mathematical society, Providence, Rhode Island (2003).

[7] A. Kirillov, Lectures on the orbit method, Graduate Studies in Mathematics, vol. 64, American mathematical society, Providence, Rhode Island, 2004.

[8] B. Kostant, Quantization and unitary representations, in: C. Taam(ed) Lecture in modern analysis and applications III, Lecture Notes in Mathematics **170**, Springer Berlin-Heiderberg-New York, 1970, 87–208.

[9] M. Saito, T. Takebe and H. Terajima, Deformation of Okamoto-Painlevé pairs and Painlevé equations, J. Algebraic Geometry **11** (2002) 311–362.

[10] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **220** (2001) 165–229.

[11] K. Ueno and K. Takasaki, Toda lattice hierarchy, in Group representations and system of differential equations, Adv. Studies Pure Math. **4**, North-Holland, Amsterdam 1984, 1–95